Значит, $A\times A'$ эквивалентна $B\times B'$, а поэтому $B\times B'$ изоморфна той алгебре класса $\mathfrak{B}$, которая соответствует алгебре $A\times A'$ при рассматриваемой эквивалентности классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Перейдем к свободным произведениям. При определении в $B*B'$ операций класса $\mathfrak{A}$ посредством

$$(1) \qquad b_1\dots b_r\varrho = b_1\dots b_r(\varrho\varphi), \quad (b_i\in B*B',\ i=1,\dots,r),$$

$B*B'$ превращается в алгебру класса $\mathfrak{A}$ $\overline{B*B'}$ (см. лемму 1 из [3] и ее доказательство). При этом θ, θ' изоморфно отображают A, A' на подалгебры B, B' алгебры $\overline{B*B'}$. Поскольку $A*A'$ — $\mathfrak{A}$-свободное произведение, θ и θ' можно продолжить до гомоморфного отображения η $A*A'$ в $\overline{B*B'}$. Гомоморфизм η на самом деле есть отображение на $\overline{B*B'}$. Действительно, если $x\in B*B'$, то существует запись вида $x=b_1\dots b_nb_1'\dots b_m'\sigma$, где σ — главная производная операция класса $\mathfrak{A}$, $b_i\in B$ $(i=1,\dots,n)$, $b_j'\in B'$ $(j=1,\dots,m)$. Однако $\sigma=\varrho\varphi$, где ϱ — некоторая операция класса $\mathfrak{A}$, а поэтому, ввиду (1), в алгебре $\overline{B*B'}$

$$x=b_1\dots b_nb_1'\dots b_m'\varrho.$$

Определяя в $A*A'$ операции класса $\mathfrak{B}$ путем

$$a_1\dots a_r(\varrho\varphi)=a_1\dots a_r\varrho, \quad (a_i\in A*A',\ i=1,\dots,r),$$

мы превратим $A*A'$ в алгебру класса $\mathfrak{B}$ $\overline{A*A'}$, притом θ^{-1}, θ'^{-1} изоморфно отображают B, B' в подалгебры A, A' алгебры $\overline{A*A'}$. Как и выше, θ^{-1} и θ'^{-1} можно продолжить до гомоморфного отображения χ $B*B'$ на $\overline{A*A'}$.

$\eta\chi$ является отображением $A*A'$ на себя, тождественным для элементов A и A'. Имеет место

$$(a_1\dots a_na_1'\dots a_m'\varrho)(\eta\chi)=((a_1\eta)\dots(a_n\eta)(a_1'\eta)\dots(a_m'\eta)(\varrho\varphi))\chi=$$
$$=((a_1\theta)\dots(a_n\theta)(a_1'\theta')\dots(a_m'\theta')(\varrho\varphi))\chi=a_1\dots a_na_1'\dots a_m'\varrho,$$

т. е. $\eta\chi$ — тождественное отображение. Итак, η — взаимно однозначно, т. е. оно есть изоморфизм $A*A'$ на $\overline{B*B'}$. Ввиду (1), $A*A'$ и $B*B'$ эквивалентны при отображении операций φ. Этим лемма доказана.

Еще раз отметим, что отображение операций φ, определяющее эквивалентность классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, тем самым однозначно определяет и соответствие между алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. Примитивный класс алгебр $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных полумодулей над некоторым ассоциативным полукольцом с единицей, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I и V.