Значит, $A\times A'$ эквивалентна $B\times B'$, а поэтому $B\times B'$ изоморфна той алгебре класса $\mathfrak{B}$, которая соответствует алгебре $A\times A'$ при рассматриваемой эквивалентности классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Перейдем к свободным произведениям. При определении в $B\ast B'$ операций класса $\mathfrak{A}$ посредством

[redacted]

$\overline{B\ast B'}$ превращается в алгебру класса $\mathfrak{A}$ (см. лемму 1 из [3] и ее доказательство). При этом θ, θ' изоморфно отображают B, B' на подалгебры A, A' алгебры $\overline{B\ast B'}$. Поскольку $A\ast A'$ — свободное произведение, θ и θ' можно продолжить до гомоморфного отображения η $A\ast A'$ в $\overline{B\ast B'}$. Гомоморфизм η на самом деле есть отображение на $\overline{B\ast B'}$. Действительно, если $x\in\overline{B\ast B'}$, то существует запись x вида [redacted], где ω — главная производная операция класса $\mathfrak{A}$, $b_i\in B$ $(i=1,\dots,k)$, $b'_j\in B'$ $(j=1,\dots,m)$. Однако $\omega=\varphi\bar{\omega}$, где $\bar{\omega}$ — некоторая операция класса $\mathfrak{A}$, а поэтому, ввиду (1), в алгебре $\overline{B\ast B'}$

[redacted]

Определяя в $A\ast A'$ операции класса $\mathfrak{B}$ путем

[redacted]

мы превращаем $A\ast A'$ в алгебру класса $\mathfrak{B}$ $\overline{A\ast A'}$. При этом θ^{-1}, θ'^{-1} изоморфно отображают B, B' на подалгебры A, A' алгебры $\overline{A\ast A'}$. Как и выше, θ^{-1} и θ'^{-1} можно продолжить до гомоморфного отображения χ $B\ast B'$ на $\overline{A\ast A'}$.

$\eta\chi$ является отображением $A\ast A'$ на себя, тождественным для элементов A и A'. Имеет место:

[redacted]

т. е. $\eta\chi$ — тождественное отображение. Итак, η взаимно однозначно, т. е. оно есть изоморфизм на $\overline{B\ast B'}$. Ввиду (1), $A\ast A'$ и $B\ast B'$ эквивалентны при отображении операций φ. Этим лемма доказана.

Еще раз отметим, что отображение операций φ, определяющее эквивалентность классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, тем самым однозначно определяет и соответствие между алгебрами классов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$.

Теорема 1. Примитивный класс алгебр $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда эквивалентен примитивному классу всех правых унитарных полумодулей над некоторым ассоциативным полукольцом с единицей, если $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям I и V.